Untersuchungen

über die

Elasticität der Krystalle

des

regulären Systems.

HABILITATIONSSCHRIFT

zur

Erlangung der Venia legendi

vorgelegt einer

hohen philosophischen Facultät

der

UNIVERSITÄT ZU FREIBURG I. BR.

von

Dr. K. R. Koch.

FREIBURG I. B.
Universitäts-Buchdruckerei von Chr. Lehmann.
1882.

[Separatabdruck aus: „Berichte über die Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. B. VIII. 1.“]

Untersuchungen über die Elasticität der Krystalle des regulären Systems.

I. Steinsalz, Sylvin, chlorsaures Natron.

Durch die von mir (Wied. Ann. N. F. Bd. 5. p. 521 ff.) beschriebene und an Steinsalzstäbchen geprüfte Methode, die elastische Biegung kurzer Stäbe vermittelst der Verschiebung von Interferenzstreifen zu messen, ist es möglich geworden, die Elasticitätscoefficienten einer grösseren Zahl von Krystallen als bisher exact zu bestimmen. Ich wählte nach Untersuchung des Steinsalzes zunächst Chlorkalium (Sylvin) und chlorsaures Natron. Leider ist es mir bis jetzt nicht gelungen, die Bestimmung bei letzterer Substanz zu Ende zu führen, da das angewandte Material vielfach im polarisirten Lichte doppelbrechende Einschlüsse zeigte, also unbrauchbar war, oder beim Schleifen Sprünge und Risse erhielt, die nicht gestatteten Stäbchen von der nöthigen Länge herzustellen.

Bekanntlich ist der Elasticitätscoefficient bei amorphen Körpern keine Constante, sondern bei verschiedenen Stäben derselben Substanz, bedingt durch die Verschiedenheit in der Herstellung und Bearbeitung derselben, innerhalb ziemlich weiter Grenzen schwankend. Es entsteht nun die Frage, ob dieser Coefficient bei krystallinischen Körpern bei gleicher Richtung im Krystall für verschiedene Krystallindividuen eine Constante ist. Für Steinsalz ist die Constanz desselben durch die Uebereinstim-

mung der von Hrn. Voigt gefundenen Werthe[1]) mit den meinigen bewiesen. Für Sylvinkrystalle ergeben die mitzutheilenden Versuche dasselbe; für das chlorsaure Natron sind die Versuche noch nicht abgeschlossen.

Vor der detaillirteren Angabe der Resultate selbst mag jedoch hier die Beschreibung des von Hrn. Breithaupt und Sohn in Cassel gelieferten Präcisionsapparates und eine Auseinandersetzung der Methoden, nach welchen die Dimensionsbestimmungen der Stäbchen vorgenommen wurden, seine Stelle finden.

Der **Messapparat** hatte im Wesentlichen seine frühere Gestalt behalten.

In der Mauer waren die zwei Lager A und B (Figur 1) für den Eisenstab C fest eingegypst. An den Stab C, der durch Q_1 festgeschraubt war, wurde vermittelst der eisernen Muffe Q_2 die stählerne Schiene D, auf der sich der ganze Messapparat befand, festgeklemmt. D trug das feste Lager M und das bewegliche dachförmige Lager L K. K konnte durch die Schraube O an jeder beliebigen Stelle festgestellt werden und L war durch die Mikrometerschraube G verschiebbar. Das Prisma J war durch die sehr genau gearbeitete Stopfbüchse H in vertikaler Richtung verstellbar und konnte zusammen mit derselben in jeder Richtung durch die Schrauben $N_1 N_2 N_3$ verschoben und geneigt werden. Die Schrauben $N_4 N_5 N_6$ dienten nach definitiver Einstellung zum Festklemmen desselben. Die Schiene D trug dann noch das auf ihr verschiebbare um P_1 und P_4 drehbare Beobachtungs-Mikroskop E. Da dasselbe jedoch beim Auflegen der Stäbchen wie bei der Einstellung derselben hinderlich war, so wurde meistens mit einem anderen Mikroskope

[1]) Pogg. Ann. Ergbd. VII. p. 1.

beobachtet, das auf einem fest mit der Mauer verbundenen Tischchen aufgestellt war.

Die Belastung griff nicht mit einer Schneide an, sondern mit der Spitze des Belastungsbügels B (Figur 2), die auf einem Kautschukplättchen A ruhte; das kleine Gewicht b diente zur Aequilibrirung des Bügels B. An B hing vermittelst des Bügels C das constante Gewicht D und an diesem vermittelst des durch d_1 verstellbaren Fadens c der Bügel E, welcher das eigentliche Belastungsgewicht F trug und mit seiner horizontalen Endplatte e in ein Oelgefäss G tauchte, um etwaige Erschütterungen beim Lösen der Arretirung HH zu verhindern.

Der Arretirung (Figur 3) war folgende Einrichtung gegeben. Der Bügel E (Figur 2) ruhte bei der Entlastung mit seiner Spitze auf den horizontalen Tischchen HH (Figur 2) oder A (Figur 3). A war durch die Federcharniere $a_1 a_2$ mit der in der Mauer festgemachten eisernen Platte A_1 verbunden. An A war rechtwinklig der Stab B angeschraubt, dessen unteres Ende b mit dem gegenüberliegenden Punkte c der Feder C durch einen festgespannten Faden verbunden war. Die Feder C konnte durch eine auf der fest in der Wand befindlichen Stütze D sitzende Mikrometerschraube E oder behufs schnellerer Belastung durch die Hebelvorrichtung F der Wand genähert werden. War die Belastung arretirt, so wurde vermittelst der Feder C das Tischchen A (oder in Figur 2 HH) erhoben gehalten; durch Anziehen der Schraube E oder des Hebels F senkte sich A durch die auf ihm liegenden Gewichte und die Belastung griff an.

Die Senkung wurde in derselben Weise wie früher (l. c. p. 258) an dem Wandern der Interferenzstreifen beobachtet, die zwischen der oberen Kathetenfläche des Prismas und dem zu untersuchenden Stäbchen bei An-

wendung von Natriumlicht entstehen. Jedesmal wenn an dem beobachteten Punkte ein Wechsel von hell durch dunkel zu hell eingetreten ist, also das Fadenkreuz wieder die gleiche Stellung zwischen den dunklen Streifen einnimmt, ist der Abstand zwischen Prisma und Stäbchen (bei senkrechter Incidenz) um eine Grösse gleich der halben Wellenlänge des Natriumlichtes vermehrt oder vermindert. Die Beobachtung fand nun so statt, dass die Arretirung vermittelst der Schraube langsam gelöst und dabei die Zahl der das Fadenkreuz passirenden Interferenzfranzen gezählt wurde; dasselbe geschah bei der Entlastung. Nachdem dies einige Male wiederholt und constant dieselbe Zahl gefunden war, konnte man bei der Fortsetzung der Beobachtungsreihe von der jedesmaligen Zählung aller das Fadenkreuz passirenden Interferenzfranzen absehen; es genügte, nur den Anfangs- und Endpunkt genau zu beobachten, um die Bruchtheile gehörig zu schätzen. Hierbei bediente ich mich der Hebelvorrichtung, wodurch die Belastung schneller, aber mit derselben Sicherheit ausgeführt werden konnte, wie bei der Lösung der Arretirung durch die Schraube.

Die **Messung des Abstandes der Lagerkanten** L und M (Figur 1) geschah mit Hülfe der Mikrometerschraube G. Dem beweglichen Lager L, das sich unmittelbar an die Schraubenspitze lehnte, sollten solche Dimensionen gegeben sein, dass bei einer Stellung der Mikrometerschraube auf 10,000 der Abstand der Lager genau 10,000 Mm. betrüge. Es war demnach nothwendig zu prüfen, wie genau es gelungen war, diese Bedingung zu erfüllen. Es geschah dies mit einem sogenannten „gravity piece“[1]),

[1]) Vergl. Ber. üb. die wissensch. Apparate auf d. Londoner internationalen Ausstellung im Jahre 1876. Hsg. v. A. W. Hofmann. Braunschweig 1878, pag. 208.

d. h. vermittelst eines Glasstückes, das durch Anziehen der Mikrometerschraube G zwischen den Lagern mit schwacher Klemmung gehalten wurde. G wurde darauf langsam gelöst und an der Trommel der Punkt abgelesen, bei dem das Glasstück zwischen den Lagern durchfiel. Misst man dann vermittelst des Sphärometers die Dicke des Glasstückes an der Stelle, die sich zwischen den Lagerkanten befand, so müsste, wenn die beiden Mikrometerschrauben und die Länge des beweglichen Lagers richtig wären, das Resultat dasselbe sein. Gefunden wurde:

Gravity piece.	Dicke m. Sphärometer gemessen.	Dicke mit Mikrometerschraube gemessen.	Differenz.
No. 1	10.491 m/m.	10.467 m/m.	0.024 m/m.
„ 2	8.990 „	8.962 „	0.028 „

Der Abstand der Lagerkanten ist also, mit der Mikrometerschraube G gemessen, unter Voraussetzung der Richtigkeit der Sphärometerschraube um 0.03 m/m. zu klein. Offenbar ist die Messung mit der Mikrometerschraube des Apparates etwas fehlerhaft; es liegt jedoch auf der Hand, dass die Abweichungen in anderem Sinne erfolgen müssten, als sie erfolgt sind.

Die **Messung der Dicke** des Stäbchens wurde mit dem Sphärometer in der von mir (Wied. Ann. N. F. III. p. 611 ff.) angegebenen Weise ausgeführt. Das Stäbchen C (Figur 4) wurde zwischen die Spitze der Sphärometerschraube A und eine ihr gegenüberstehende Spitze B gebracht, die auf einem federnden Glasplättchen D sass; der Moment der Berührung von A mit C beim Herabdrehen der Schraube, wurde durch das beginnende Wandern der Interferenzfranzen zwischen den Glasplatten D

und E bestimmt. Die Genauigkeit der Bestimmung des Contactes der Schraube lässt sich, wie ich gezeigt habe, auf 0.1 μ[1]) bestimmen. Offenbar wird jedoch durch eine schiefe Lage des Stäbchens C zwischen den zwei Spitzen A B die Richtigkeit der Messung bedeutend beeinflusst. Ist nämlich d der beobachtete Werth der Dicke, r der Radius der Kugel A, in welche die Spindel der Sphärometerschraube ausläuft, l der Radius der kleinen kreisförmigen Ebene, in der die untere Spitze B endigt, so ist die wahre Dicke h, wenn φ der Winkel ist, den d und h mit einander bilden:

$$h = d \cos \varphi - r(1 - \cos \varphi) - l \sin \varphi.$$

Dies ergiebt für $\varphi = 1^0$ und d = 1 m/m. d — h = 0.013 m/m.[2])

Es kommt nun darauf an, den Winkel φ möglichst klein zu machen. Man kann dies dadurch bewirken, dass man die Orientirung des Stäbchens, das auf einem mit drei Stellschrauben versehenen Tischchen festgeklemmt ist, so lange ändert, bis man für einen Punkt das Minimum der Dicke gefunden hat. Es ist also bei mehrfachen Einstellungen auf denselben Punkt nicht das Mittel, sondern der kleinste erhaltene Werth der richtigste. Da diese Methode der Messung jedoch zu umständlich ist, so wurde folgendermassen verfahren. Unter der Annahme,

---

[1]) μ = 1 Mikromillimeter = 0.001 m/m.

[2]) Liesse man die untere Spitze ebenfalls in einer Kugel (deren Radius r_1 sei) endigen, so würde

$$h = d \cos \varphi - (r + r_1)(1 - \cos \varphi).$$

Diese Formel ist scheinbar günstiger, da man durch Verkleinern von r_1 (Auslaufenlassen in eine Spitze) den Fehler, der durch die Verlegung des contacten Punktes entsteht, möglichst gering machen kann. Hierbei treten jedoch andere Fehler auf, hervorgerufen durch ungenaue Centrirung der das Ende der Schraube bildenden Kugel A und durch ein Sich-Eindrücken der Spitze B in das zu messende Stäbchen.

dass die untere Fläche des Stäbchens eine Ebene ist oder nur wenig von einer solchen abweicht, wurde die Richtung des Stäbchens durch die drei Stellschrauben des Tischchens so lange verändert, bis alle Punkte der unteren Fläche die untere Spitze bei horizontaler Verschiebung gerade berührten, was sich dadurch kenntlich machte, dass bei jedem Punkte der unteren Fläche bei der geringsten Drehung an den Stellschrauben eine Bewegung der Interferenzstreifen eintrat. Auf diese Weise gelang es allerdings, die Messungen mit einer ausserordentlichen Präcision auszuführen. Die Resultate einer mehrfach wiederholten Messung mögen deshalb hier als Beispiel eine Stelle finden.

Die mittlere Dicke eines Stäbchens wurde durch Messung an 12 verschiedenen Punkten gefunden.

Messung I 1.0510 m/m.
„ II 1.0519 „
„ III 1.0514 „

Der dritte Werth war vermittelst der oben erwähnten umständlicheren Methode erhalten. Maass man die Dicke, indem man das Stäbchen nur nach dem Augenmaasse zwischen den Spitzen möglichst senkrecht zur Schraubenaxe stellte, so ergab sich

1.0560 m/m.,

also eine um ca. 0.5% grössere Dicke. Es wurde grundsätzlich immer dieselbe Stelle der Schraube benutzt, um später bei der Ermittlung des Fehlers die Arbeit möglichst abzukürzen. Eine Bestimmung der Fehler der Schraube nach einer neuen Methode, die erlaubt direct den Fehler jedes Schraubenganges zu messen, ergab als Correction — 3.5 μ. Es liessen sich jedoch nicht alle Messungen mit derselben Präcision ausführen, weil die Stäbchen theilweise während der Beobachtung zer-

brachen und deshalb die Messung nicht an hinreichend vielen Punkten ausgeführt werden konnte.

Die **Messung der Breite** erfordert nicht eine so grosse absolute Genauigkeit, wie die der Dicke; es genügt, wenn dieselbe auf ungefähr 0.01 m/m. genau ist. Es wurde zuerst versucht, dieselbe vermittelst der am Hauptapparate befindlichen Mikrometerschraube zu bestimmen. Hierzu wurde das Stäbchen auf das bewegliche Lager gelegt und die eine Kante desselben in das Fadenkreuz eines senkrecht darüberstehenden Mikroskopes gebracht (eine einfache Vorrichtung erlaubte das Stäbchen parallel der Drehungsaxe der Mikrometerschraube zu stellen.) Darauf wurde das bewegliche Lager durch die Mikrometerschraube so lange verschoben, bis die andere Kante des Stäbchens ins Fadenkreuz fiel. Die Differenz der Ablesungen an der Schraube giebt dann die gesuchte Breite. Mit dieser Methode ist jedoch die erforderliche Genauigkeit nicht zu erreichen, da sich die Einstellungen auf die Kanten nicht genau machen lassen. Mehrfach wiederholte Messungen an *demselben* Querschnitte des Stäbchens (jedoch bei verschiedener Beleuchtung) ergaben Abweichungen von über 8%.

Es wurde deshalb die Breite in derselben Weise wie die Dicke gemessen. Die hierdurch erhaltenen Werthe stimmten ausserordentlich gut überein. Zwei unabhängige Messungen an je acht verschiedenen Querschnitten ergaben z. B. als mittlere Breite:

I. Reihe 3.2074 m/m.
II. „ 3.2003 „

Die Werthe weichen also nur um circa 0.2% von einander ab. Es hat die Ausführung auch dieser Messung mit dem Sphärometer ausserdem den Vortheil, dass alle Dimensionsbestimmungen auf diese Weise mit derselben Mikrometerschraube gemacht sind.

Das **Gewicht der angewandten Gewichtsstücke** war hinreichend genau bestimmt.

Die **Messung der Senkung** war nicht in demselben Grade genau; die Unsicherheit derselben betrug vielmehr je nach der Anzahl der beobachteten Interferenzstreifen 1—2%.

Wie schon oben erwähnt, griff die Belastung nicht mit einer Schneide, sondern mit einer Spitze an, es war diese Anordnung aus mehreren Gründen getroffen. Es lässt sich bei der Belastung vermittelst einer Schneide nie genau angeben, ob dieselbe wirklich mit ihrer ganzen Breite auf dem Stäbchen ruht, vielfach konnte man direct beobachten, dass sie nur mit einem Punkte angriff, da sie sich leicht um eine verticale Axe drehen liess. Da nun die Oberfläche der Stäbchen, wie die Dickenmessungen ergaben, nicht vollkommene Ebenen sind, so wird meistentheils nur ein nicht einmal genau zu ermittelnder Punkt der Schneide angreifen. Um diesem Uebelstande zu begegnen, wandte ich früher (l. c. p. 260) entweder zwei Spitzen oder eine durchbrochene Schneide an; immer muss hierbei der Angriffspunkt der Belastung in die Richtung der Axe des prismatischen Lagers fallen, denn nur in diesem Falle kann die Drehungsaxe, um die sich das Stäbchen bei der Belastung dreht (an welcher auch die Beobachtung der Senkung stattfinden muss) ermittelt werden, andernfalls fällt sie in der Regel ausserhalb des Gesichtsfeldes. Eine Spitze als angreifender Theil des Belastungsapparates lässt sich aber mit grosser Präcision in die Mitte des Stäbchens und in die Richtung der oberen Kante des prismatischen Lagers bringen, um welche die Drehung der Construction der Lager zufolge hauptsächlich stattfindet. Die Versuche ergaben die Drehung bei Belastung mit einer Spitze bedeutend geringer als bei Anwendung der Schneide. Es fragt sich jedoch, ob

beide Methoden unter sonst gleichen Umständen dieselbe elastische Senkung geben. Zur Untersuchung wurde ein Glasstab benutzt.

Länge: 20.000 m/m. Breite: 4.82 m/m.
Dicke: 1.274 „ Belastung: 0.3754 Kgr.

Gefunden wurde:

Beobachtungsreihe.	Belastung griff an mit Schneide.	mit Spitze.	Beobachtungsreihe.
No. I.	36.9	37.5	No. I.
„ II.	37.3	36.9	„ II.
„ III.	36.8	36.9	„ III.
„ IV.	36.9	36.4	„ IV.
	Mittel 36.98	Mittel 36.92	

Die Einheit der Zahlen ist die halbe Wellenlänge des Natriumlichtes. Nach jeder der acht Beobachtungsreihen wurde der Apparat auseinander genommen, gereinigt und die Einstellung neu gemacht. Die Uebereinstimmung ist also eine vollständige. Da die Belastung durch eine Spitze ungleich bequemer war, so wurde fortan nur die Spitze zur Belastung benutzt, die zum Schutze für das Stäbchen auf einem Kautschukplättchen ruhte.

Schon in der ersten Abhandlung (l. c. p. 257) habe ich darauf hingewiesen, dass es nothwendig ist, eine Hülfsvorrichtung für solche Substanzen anzubringen, welche die Lichtstrahlen von ihrer polirten Oberfläche in einem solchen Intensitätsverhältnisse zu denen schon vom Prisma reflectirten zurückwerfen, dass zwischen beiden Strahlengattungen keine sichtbaren Interferenzfranzen entstehen. Ich hatte damals, weil es sich um einen metallischen Körper (Messing) handelte, eine Klammer angewandt, an deren unteren Fläche ein dünnes auf einer Seite geätztes

Glasplättchen angekittet war. Bei den jetzt von mir untersuchten Krystallen war eine solche anschraubbare Klammer nicht anwendbar, weil in den Stäbchen hierbei durch den angewandten Druck sofort Gleitflächen entstanden. Ich verfuhr deshalb folgendermassen. Auf das Glasplättchen B (Figur 5) wurde ein Klebwachströpfchen c von der Form wie die Figur es zeigt gebracht, so dass es oben eine scharfe Kante (α, β) bildete. Mit dieser wurde es an das Stäbchen gekittet. Beim Auflegen des Stäbchens auf die Lager wurde dann diese Kante in die Mitte zwischen die Lager und die Beobachtungsspitze gerade darüber gebracht. Es könnte nun scheinen, als wäre hierdurch eine Fehlerquelle geschaffen; mehrfache Versuche an einem Glasstäbchen haben jedoch gezeigt, dass die Senkungen, erhalten mit angekittetem Plättchen, dieselben Werthe haben wie ohne dasselbe.

Beobachtungsreihe.	Das Stäbchen war ohne Plättchen.	mit angekittetem Plättchen.	Beobachtungsreihe.
No. I.	13.71	13.76	No. I.
„ II.	13.79	13.92	„ II.
„ III.	13.55	13.47	„ III.
„ IV.	13.50	13.68	„ IV.
Mittel	13.64	13.71	Mittel

Jede Zahl (in denselben Einheiten wie pag. 12) ist auch hier das Mittel aus den bei mehrfachen Belastungen und Entlastungen gefundenen Senkungen. Nach einer jeden Reihe wurde das Stäbchen abgenommen, geputzt und der ganze Apparat neu eingestellt. Die mittleren Werthe, die aus den beiden Versuchsreihen erhalten werden, stimmen auf ca. 1% miteinander überein; dies ist, mit Rücksicht auf die weiter unten zu ermittelnden Fehlergrössen, ein befriedigendes Resultat. Besonders vor-

theilhaft ist die Anwendung eines so angebrachten Plättchens noch deshalb, weil sich dasselbe bei der Berührung mit der oberen Fläche des Reflexionsprismas von selbst derselben parallel stellt, wodurch sehr viel Zeit an der sonst sehr mühsamen Einstellungsarbeit erspart wird. Nur ein Umstand ist hiermit verknüpft, der störend wirkt, der sich aber bei einiger Aufmerksamkeit vermeiden lässt. Bei höheren Temperaturen nämlich senkt sich namentlich beim Anfange der Versuche das Plättchen continuirlich; hierdurch werden die elastischen Biegungen beim Belasten scheinbar zu gross, beim Entlasten scheinbar zu klein. Da diese Senkung nahezu gleichmässig vor sich geht, so hebt sich dieselbe im Resultat auf, vorausgesetzt, dass man zur Belastung und Entlastung die gleiche Zeit gebraucht. Wendet man einen spröderen Kitt an, so wird die Senkung natürlich geringer, dafür muss das Plättchen aber auch wegen mangelnden Klebens mit einer grösseren Fläche am Stäbchen haften und wird sich schwerer der oberen Prismenfläche, wenn man beide bis zur Berührung nähert, parallel stellen, bezüglich seine Parallelität bewahren. Die durch dieses Nachgeben des Klebwachses hervorgerufenen Unterschiede bei der Belastung und Entlastung betragen allerdings nur Bruchtheile des Abstandes zweier benachbarter Interferenzfranzen, jedenfalls ist es aber practisch, die Belastung möglichst schnell, natürlich ohne Erschütterungen, wirken zu lassen. Hierzu wurde die Hebelvorrichtung (F) (Figur 3) benutzt. Bei warmer feuchter Luft wird ausserdem noch das Stäbchen sowohl an seiner ganzen Oberfläche angegriffen (Bildung von Aetzfiguren), als auch an den Stellen, die auf den Lagern liegen, mit Eindrücken versehen, welche die Dicke an diesen Stellen vermindern; man erhält daher mit jeder neuen Versuchsreihe wachsende Werthe für die Senkung. Man wird also gut thun, bei zu warmem feuchtem Wetter

die Beobachtungen vollständig zu unterlassen. Ausserdem ist es rathsam, die Stäbchen in einem luftdicht schliessenden Gefässe oder unter einer dieselbe nicht angreifenden Flüssigkeit aufzubewahren resp. dieselben sogleich, nachdem sie ihre definitive Politur empfangen haben, zu benutzen, weil durch die oben erwähnten Aetzfiguren Unebenheiten entstehen, welche die Richtigkeit des Resultates beeinflussen. So wurden z. B. für ein senkrecht zur Dodekaederfläche geschnittenes Sylvinstäbchen, bei welchem die Beobachtungsreihen um drei bis vier Monate auseinanderlagen, weil die Untersuchung durch andere Arbeiten unterbrochen wurde, folgende Werthe für die Biegung auf dieselbe Länge und Belastung reducirt gefunden:

I.	II.	III.
17.7	18.8	19.3.

(Die Einheit der Zahlen ist die halbe Wellenlänge des Natriumlichtes.)

Bei diesem Stäbchen war nicht nur die Oberfläche angegriffen, sondern dasselbe zeigte auch deutlich an den Stellen des Querschnittes, mit welchen dasselbe bei Beobachtung I und II (die im Sommer stattfanden), auf den Lagern aufgelegen hatte, Verminderungen der Dicke; hierdurch sind die grossen Abweichungen erklärlich.

Ich habe (l. c. p. 259) erwähnt, dass die Belastung in der Mitte zwischen den Lagern angreifen muss. Es wurde dies durch Einstellung vermittelst der Schrauben $T_1 T_2$ der dioptrischen Vorrichtung R_2 erreicht (Fig. 1). Ausserdem diente der vordere Faden derselben nebst einem andern horizontal gespannten R_4 dazu, das Mikroskop senkrecht zur vorderen Prismenfläche zu stellen, also bei senkrechter Incidenz der interferirenden Strahlen zu beobachten. Der Ort nämlich, auf den man das Mikroskop einzustellen hat, um die Interferenzfranzen möglichst scharf

zu sehen, liegt bei den Dimensionen des benutzten Reflexionsprismas einige Millimeter hinter der vorderen Fläche des Prismas. Es ist nun leicht, den vorderen horizontalen und verticalen Faden in eine solche Entfernung von der vorderen Prismenfläche zu bringen, dass ihre Bilder (entstanden durch Reflexion an der vorderen Prismenfläche) mit den Interferenzstreifen in dieselbe Ebene fallen. Man sieht dann durch das Mikroskop die Interferenzfranzen und das Bild der Fäden scharf, die Fäden selbst aber verbreitert und verwaschen; stellt man dann das Mikroskop so ein, dass das scharfe Bild des Fadens das verbreiterte halbirt, so wird man sicher sein, die Absehlinie mit hinreichender Genauigkeit senkrecht zur vorderen Fläche des Reflexionsprismas gestellt zu haben, d. h. also bei nahezu senkrechter Incidenz zu beobachten; der Fehler übersteigt hierbei 0.5° nicht; er würde jedoch erst bei 3° das Resultat um 0.2% beeinflussen.

Die Beobachtung der Senkung selbst hat an dem Punkte der Querlinie des Stäbchens zu geschehen, welcher durch die Drehung desselben um eine Längsaxe bei angreifender Belastung keine Senkung erfährt (wie l. c. p. 260 gezeigt wurde). Das dort angegebene Verfahren, die Axe durch leichtes Drehen des Lagers L (Figur 1) zu suchen, wurde auch jetzt angewandt. Da sich diese Axe während der Belastung verlegte, so konnte man entweder die mittlere Drehungsaxe ermitteln und an dieser beobachten oder man machte je einen Satz Beobachtungen an der Drehungsaxe, wie sie ohne Belastung und wie sie mit Belastung gefunden wurde und nahm das Mittel aus den beiden erhaltenen Zahlen. Gewöhnlich wurde die letztere Methode gewählt, weil dieselbe genauer war.

Als letzte Correction ist noch die Grösse der Ein- resp. Durchdrückung der Lager zu erwähnen (l. c. p.

261 ff.) Sowohl die Lager, welche in eine ziemlich scharfe Kante auslaufen, wie diejenigen Stellen, mit denen das Stäbchen auf denselben ruht, erleiden bei der Belastung eine Compression, die nach Aufhebung der Belastung wieder verschwindet. Hierdurch wird die Senkung um 1—2% vergrössert. Es wird dieselbe offenbar für verschiedene Substanzen verschieden sein; es ist also nothwendig, diesen Werth für eine jede besonders bei verschiedenen Belastungen zu bestimmen. Es ergab sich

	0.5585 Kgr.	0.3754 Kgr.	0.1566 Kgr.	0.0793 Kgr.
Sylvin (senkrecht zu der Würfelfläche) . . .	1.41	0.70	0.35	0.22
Sylvin (senkrecht zu der Dodekaederfläche) . .	1.49	0.86	0.34	0.21
Glas	2.75	1.37	0.71	0.46

Diese Zahlen (Einheit: halbe Wellenlänge des Natriumlichtes) sind die Mittel aus je ca. sieben von einander unabhängigen Beobachtungsreihen. Dieselben wurden erhalten mit besonders zu diesem Zwecke angefertigten Klötzen der betreffenden Substanz von ca. 9 m/m. Breite und Dicke. Die Werthe sind für die Sylvinstäbchen nach den verschiedenen Richtungen nahezu dieselben, ihre Abweichungen liegen wenigstens innerhalb der Fehlergrenzen. Für Glas ist die Durchdrückung nahezu doppelt so gross. Diese Senkung wird offenbar in irgend einem Verhältniss zur Abnahme der Breite wachsen; es wurde angenommen, dass dieselbe der Breite umgekehrt proportional sei. Zur Prüfung dieser Annahme wurde ein Stäbchen von 3.1 m/m. Breite auf ein 5.1 m/m. dickes Glasstück gekittet und bei einer Länge von 10 m/m. mit 0.3754 Kgr. belastet; gefunden wurde als Senkung 2.35;

die elastische Biegung unter der Annahme E — 7000 für Glas ist — 0.11; mithin ist die durch die Compression der Lager und des Stäbchens hervorgerufene Senkung = 2.24. Berechnet man aus diesem Werthe den entsprechenden für 9 m/m Breite, so erhält man 0.77. Gefunden wurde 0.70. Der für die Berechnung des Elasticitätscoefficienten benutzte Werth der Senkung für eine bestimmte Belastung ist also gleich dem Gesammtwerthe der Senkung s, weniger dem Werthe s_b, welcher von der Belastung herrührt, die der Bügel E (Figur 2) selbst ausübt, und dem Werthe s_d, der aus der Durchdrückung der Lager resultirt. Die wahre Biegung wird also sein:

$$S = s - (s_b \pm s_d).$$

Da die mittleren Fehler einer Beobachtungsreihe durchschnittlich folgende Grössen haben:

Mittlerer Fehler von s $m_1 = 0.05$,
„ „ „ s_b $m_2 = 0.05$,
„ „ „ s_d $m_3 = 0.02$,

so wäre in bekannter Weise der Fehler des Resultates

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} = 0.07.$$

[Die Einheit der Zahlen ist die halbe Wellenlänge des Natriumlichtes.] In Wirklichkeit ist die Unsicherheit, mit welcher die Werthe S behaftet sind, bedeutend grösser. Es kommt dies daher, dass durch die Belastung der ganze Apparat nicht nur eine Senkung erfährt, sondern auch deformirt wird. Bringt man nämlich das Gewicht ganz am Ende der Schiene D (Figur 1) an, so tritt nicht nur eine Senkung des ganzen Apparates ein, sondern es erfolgt auch eine Verschiebung der Interferenzfranzen gegen eine feste Marke des Prismas; dasselbe geschieht in geringerem Maasse, wenn man das Gewicht zwischen M und P_3 anbringt. Die Senkung des ganzen

Apparates lässt sich eliminiren durch Anbringung des Mikroskopes am Apparat selbst, oder da es bequemer war, das Mikroskop von einem besonderen in der Wand befestigten Halter tragen zu lassen, dadurch dass man die Interferenzstreifen vertical stellt. Das aus der Deformation der Schiene resultirende Wandern der Streifen bestand entweder in einer blosen Drehung derselben, oder es erfolgte im Sinne einer Senkung oder Hebung. Die Unsicherheit, welche hierdurch in der Bestimmung von S entsteht, wächst damit auf 0.2 (Halbwellen des Natriumlichtes).

Resultate.

1) Steinsalz.

In Bezug auf die Untersuchungen am Steinsalz verweise ich auf die von mir (Wied. Ann. N. F. V. pag. 521) publicirte Arbeit, in der ich die Brauchbarkeit der Methode speciell durch die Untersuchungen am Steinsalz nachwiess.

Gefunden wurde als Mittel:

E_1 senkrecht zur Würfelfläche:	E_2 senkrecht zur Dodekaederfläche:
4030	3395

$$\frac{E_1}{E_2} = 1.188.$$

2) Sylvin.

Untersucht wurden vom Sylvin drei Krystalle, aus denen eine grosse Anzahl (36) von Stäbchen geschnitten wurden, doch nur mit wenigen gelang es, die Beobachtungen ganz zu Ende zu führen, weil die meisten die nöthigen Belastungen nicht ertrugen. Die Stäbchen waren von Hrn. Strübin, Optiker in Basel, in sehr vollkommener Weise hergestellt.

Ich theile der Probe wegen zuerst ein vollständiges Beobachtungsbeispiel mit.

Nachdem der Apparat und namentlich die Lagerkanten sorgfältig gereinigt waren, wurde das zu untersuchende Stäbchen, an dessen unterer Seite das Glasplättchen in der angegebenen Weise befestigt war auf die Lager aufgelegt und der Belastungsbügel B (Figur 2) mit seinem constanten Gewichte D aufgesetzt; durch die Diopter $R_1 R_3$ (Figur 1) $R_2 R_4$ wurden das Stäbchen und die Spitze des Belastungsapparates in die richtige Lage gebracht. Darauf wurde das Reflexionsprisma dem angekitteten Glasplättchen bis zur Berührung genähert und der Apparat dann nach Entfernung aller Gasflammen während einer Viertelstunde sich selbst überlassen. Das während der Einstellungsarbeiten durch die strahlende Wärme der Beleuchtungsflamme etwas weich gewordene Klebwachs war in dieser Zeit wieder hart geworden und bewahrte in Folge dessen auch nach Herunterschieben des Reflexionsprismas seine mit der oberen Fläche des letzteren parallele Lage. Nachdem die Entfernung zwischen Prisma und Stäbchen genügend war und das Mikroskop senkrecht zur vorderen Prismenfläche gestellt war, konnte die Messung der elastischen Biegung erfolgen.

Ich wähle aus dem zweiten der untersuchten Sylvinkrystalle den Stab No. 9, dessen Längsrichtung senkrecht zur Dodekaederfläche lag. Nachdem vermittelst der Lösung der Arretirung durch die Schraube die Anzahl der durch das Fadenkreuz gewanderten Interferenzstreifen gleich ca. 40 gefunden war, wurde jetzt die genauere Bestimmung durch Beobachtung der Anfangs- und Schlussstellung des Fadenkreuzes vermittelst Lösung der Arretirung durch die Hebelvorrichtung gemacht.

I. Reihe.

A. Die Beobachtung geschah an der Drehungsaxe wie sie ohne Belastung gefunden war.[1])

s	s_b	s_d	$s_b + s_d$
40.4	12.9	0.49	—
40.3	12.9	—	—
40.5	12.9	—	—
40.3	12.9	—	—
40.3	—	—	—
40.4	—	—	—
Mittel: 40.37	12.90	0.49	13.39

$S_A = 26.98.$

B. Die Beobachtung geschah an der Drehungsaxe, wie sie mit Belastung gefunden war.

s	s_b	s_d	$s_b + s_d$
40.5	13.0	0.49	—
40.6	13.0	—	—
40.5	12.9	—	—
40.6	13.0	—	—
40.7	—	—	—
40.6	—	—	—
Mittel: 40.58	12.98	0.49	13.47

$S_B = 27.11.$

Hierauf wurde das Stäbchen herunter genommen, das Plättchen frisch angekittet, der Apparat gereinigt; dann das Stäbchen neu aufgelegt (jedoch um 180° gedreht) und von neuem in der angegebenen Weise beobachtet.

[1]) Vergl. oben pag. 16. Der Kürze wegen soll durch A und B bezeichnet werden die Beobachtung an der Drehungsaxe, wie sie ohne und wie sie mit Belastung gefunden wurde.

II. Reihe.

A.

s	s_b	s_d	$s_b + s_d$
39.5	12.6	0.49	—
39.7	12.7	—	—
39.7	12.6	—	—
39.8	12.7	—	—
39.7	—	—	—
39.7	—	—	—
Mittel: 39.68	12.65	0.49	13.14

$S_A = 26.55.$

B. Die Axe hatte sich nicht verlegt:

$S_B = 26.55.$

Es wurde jetzt das Stäbchen wiederum abgenommen und in derselben Weise verfahren; das Stäbchen wiederum um 180° gedreht.

III. Reihe.

A.

s	s_b	s_d	$s_b + s_d$
39.7	12.7	0.49	—
39.9	12.8	—	—
39.8	12.7	—	—
39.8	12.8	—	—
39.8	—	—	—
39.9	—	—	—
Mittel: 39.82	12.75	0.49	13.24

$S_A = 26.58.$

B.

s	s_b	s_d	$s_b + s_d$
39.6	12.8	0.49	—
39.8	12.8	—	—
39.8	12.8	—	—
39.9	12.8	—	—
39.9	—	—	—
39.9	—	—	—
39.9	—	—	—
39.9	—	—	—
Mittel: 39.84	12.80	0.49	13.29

$S_B = 26.55.$

General-Mittel S = 26.72. $\pm$ 0.10 für eine Belastung von 0.0625 Kgr. Die Einheit für die Grössen S ist immer die halbe Wellenlänge des Natriumlichtes. Es folgen nun die Dimensionsbestimmungen.

Der Abstand der Lager (l) war an der Mikrometerschraube gemessen = 15.000 m/m. Corrigirt = 15.030 m/m.

Messung der Breite:

Die Sphärometerschraube bis auf die Spitze herabgeschroben ergab die Nullstellung:

13.8025
13.8029 Mittel: 13.8027.

Wurde jetzt das Stäbchen dazwischen gebracht, so ergaben sich an 10 verschiedenen Punkten des Querschnittes folgende Ablesungen an der Schraube. (Jede Zahl ist das Mittel aus zwei Einstellungen).

16.917
16.916
16.902
16.900
16.900
16.898
16.909
16.914
16.910
16.907

Mittel: 16.907

Also die Breite (b)
= 16.907 — 13.803
= 3.104 m/m.

Die Messung der Dicke geschah bei jedem Stäbchen an je drei Punkten auf acht Querlinien, also im Ganzen an 24 Punkten.

Nullstellung der Schraube:

13.8018
13.8020 Mittel: 13.8019.

Einstellungen auf das Stäbchen:

Vom Ende ohne Signatur[1]) — bis zur Mitte:

14.8200	14.8200	14.8245	14.8225
14.8175	14.8200	14.8260	14.8235
14.8200	14.8192	14.8230	14.8238

Vom Ende mit Signatur — bis zur Mitte:

14.8255	14.8260	14.8280	14.8252
14.8293	14.8290	14.8296	14.8278
14.8295	14.8298	14.8295	14.8270

Mittel: 14.8248.

Also die Dicke d = 14.8248 — 13.8019 = 1.0229, davon 0.0035 (vrgl. Seite 9); bleibt d = 1.019.

Hiermit sind alle Daten zur Berechnung des Elasticitäts-Coefficienten gegeben.

Die Berechnung geschah nach der Formel:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{P \cdot l^3}{s \cdot \lambda_D \cdot b\, h^3} \left\{ 1 + 3\frac{h^2}{l^2} \right\} \text{ Kgr. m/m.}$$

(wo P die Belastung, l der Abstand der Lager, b die Breite, h die Dicke, s die Anzahl der durch das Fadenkreuz gewanderten Interferenzstreifen, λ_D die Wellenlänge des Natriumlichtes bedeutet.)

In derselben Weise wurden die Beobachtungen an den anderen Stäben ausgeführt. Die Beobachtungen ergaben folgende Werthe E für die Elasticitätscoefficienten:

Stab senkrecht zur Würfelfläche.

Krystall No. I.

	E	Mittel
No. 4.	3890	
„ 6.	3991	
„ 12.	4155	4012

[1]) Die Stäbchen waren zur Unterscheidung signirt.

Krystall No. II.

„ 14.	3890		Gesammtmittel
„ 15.	4096	3993	4009

Krystall No. III.

„ 17.	4037	
„ 18.	4009	4023

Stab senkrecht zur Dodekaederfläche.

Krystall No. I.

	E	Mittel
No. 3.	[1959]	
„ 7.	[1983]	
„ 9.	2063	
„ 10.	2126	2094

Krystall No. II.

„ 14.	2092		Gesammtmittel
„ 16.	2080	2086	2088

Krystall No. III.

„ 17.	2063	
„ 19.	2106	2084

Hierzu ist zu bemerken, dass den Beobachtungen an Stab No. 3 und 7 senkrecht zur Dodekaederfläche wegen der grossen Breite derselben kein Gewicht beizulegen ist; dieselben sind nur der Vollständigkeit wegen aufgeführt; bei der Berechnung des Mittels und des mittleren Fehlers sind dieselben nicht berücksichtigt.

3) Chlorsaures Natron.

Für die Krystalle dieses Körpers liegen nur Beobachtungen an drei Stäbchen aus demselben Krystalle ge-

schnitten vor, an denen die Messung gelang. Dieselben ergaben als provisorische Werthe:

E_1 senkrecht zur Würfelfläche 4047
E_2 „ „ Dodekaederfläche 3190.

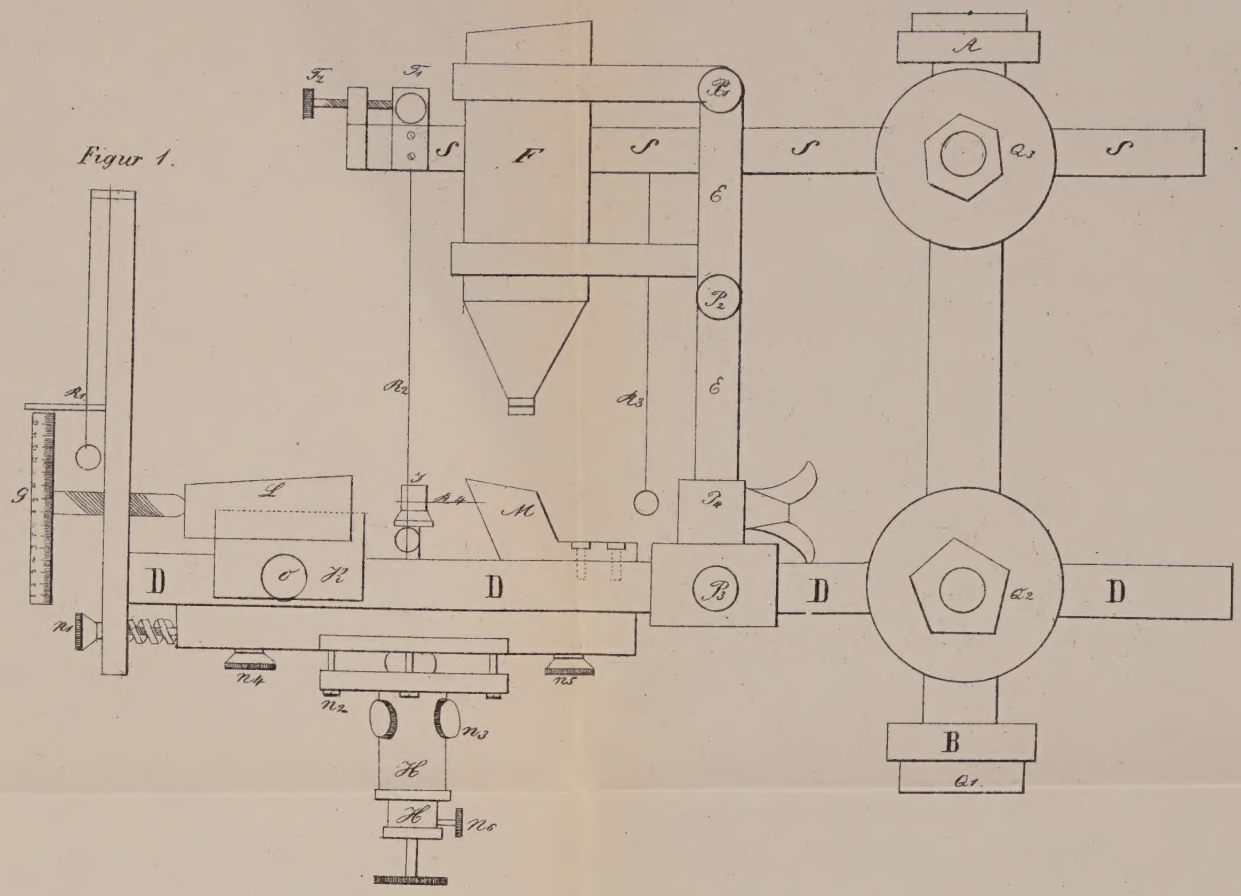
Berechnet man sich aus der oben p. 24 f. gegebenen Tabelle die mittleren Fehler, so erhält man:

	E	Mittlerer Fehler d. einzeln. Beobachtung.	Mittlerer Fehler des Resultates.
Sylvin senkrecht zur Würfelfläche . .	4009	± 91	± 34
Sylvin senkrecht zur Dodekaederfläche .	2088	± 56	± 21

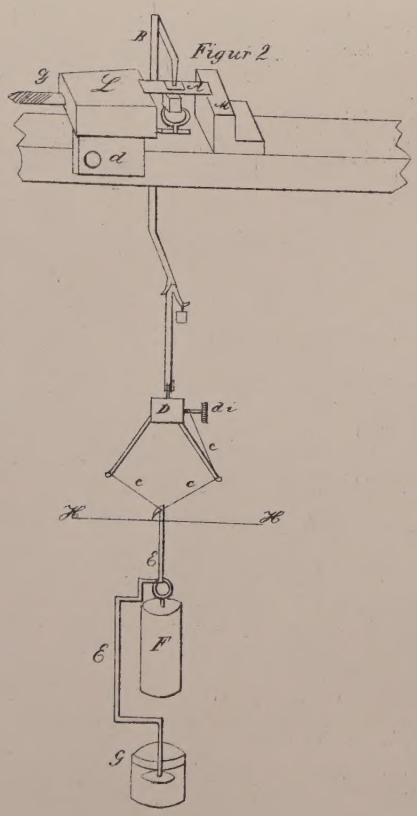
Die Uebereinstimmung der erhaltenen Werthe ist befriedigend, da der mittlere Fehler des Gesammt-Resultates (Mittel aus den Elasticitätscoefficienten aller Stäbchen, die die gleiche Richtung im Krystall haben) entsprechend der Ungenauigkeit in der Messung der Senkung (1—2%) nur ca. 1%, der des Elasticitätscoefficienten des einzelnen Stäbchens nur ca. 2% beträgt. Das Resultat wird noch günstiger, wenn man die Mittelwerthe von E für jeden Krystall miteinander vergleicht.

Krystall.	E_1 senkrecht zur Würfelfläche.	E_2 senkrecht zur Dodekaederfläche.
No. I.	4012	2094
„ II.	3993	2086
„ III.	4023	2084
Mittel	4009	2088

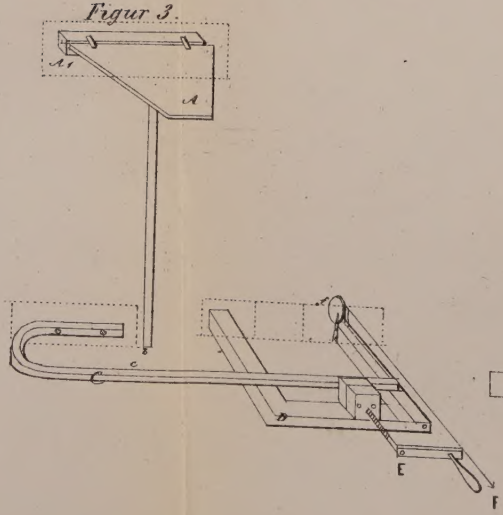
Figur 1.



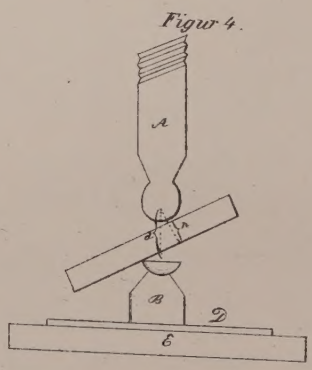
Figur 2.



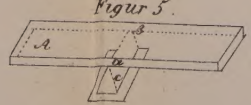
Figur 3.



Figur 4.



Figur 5.



Die Abweichungen erreichen mithin nicht $^1/_2\%$. Hiernach kann man wohl mit grosser Wahrscheinlichkeit behaupten, dass

der Elasticitätscoefficient in den Krystallen des Sylvins für die gleiche Richtung im Krystalle eine Constante ist.

Dieses Resultat wird durch etwaige constante Fehler in den Dimensionsbestimmungen nicht alterirt, da hierdurch alle Werthe in derselben Weise beeinflusst werden. Ausser den Fehlern, die bei der Bestimmung der Dimensionen der Stäbchen und bei der Messung der elastischen Senkung gemacht werden, können noch folgende Umstände die Richtigkeit des Resultates beeinflussen.

Fällt die Richtung der Längsaxe des Stäbchens nicht genau mit der Würfel- oder Dodekaederflächennormale zusammen, so wird die Senkung für die Stäbchen, deren Längsrichtung parallel der Würfelnormale liegt, grösser, die der Stäbchen, welche parallel der Dodekaederflächennormale geschnitten sind, kleiner als ihr wahrer Werth gefunden werden. Da man jedoch bekanntlich bei einiger Vorsicht die vorgeschriebene Richtung auf 1^0 innehalten kann, so wird diese Fehlerquelle keinen grossen Einfluss ausüben. Sehr oft sind aber die Krystalle nicht homogen, indem sie im polarisirten Lichte Einschlüsse von doppeltbrechenden Substanzen oder reihen- und flächenförmig angeordnete Interpositionen von Flüssigkeitszellen zeigen. Bevor also aus einem Krystalle die Stäbchen angefertigt werden, muss man denselben sorgfältig darauf hin untersuchen, da man nur solche Krystalle gebrauchen kann, welche diese Erscheinungen nicht zeigen. Noch nothwendiger ist die genaue Untersuchung der fertigen Stäbchen, da dieselben häufig durch die Bearbeitung Sprünge erhalten.

Vergleichen wir jetzt die für den Sylvin erhaltenen Werthe mit denen der beiden anderen untersuchten Krystalle des regulären Systems, so ergibt sich:

	E_1 senkrecht zur Würfelfläche.	E_2 senkrecht zur Dodekaederfläche.	$\frac{E_1}{E_2}$
Sylvin KCl	4010	2088	1.92
Steinsalz NaCl . .	4030	3395	1.19
Chlors. Natron $NaClO_3$	4047	3190	1.27

Freiburg i. B. Phys. Inst. d. Universität. 1881. Nov. 20.